ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ

1. Змінний струм. Одержання змінної електрорушійної сили. Генератор змінного струму

Явище електромагнітної індукції лежить в основі принципу одержання змінної ЕРС.

За законом Фарадея *для цього явища, індукційна електрорушійна сила (ЕРС - e_i) рівна швидкості зміни потоку вектора магнітної індукції (ВМІ) через поверхню обмежену провідником зі знаком мінус.*

При рівномірній зміні потоку:

$$e_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

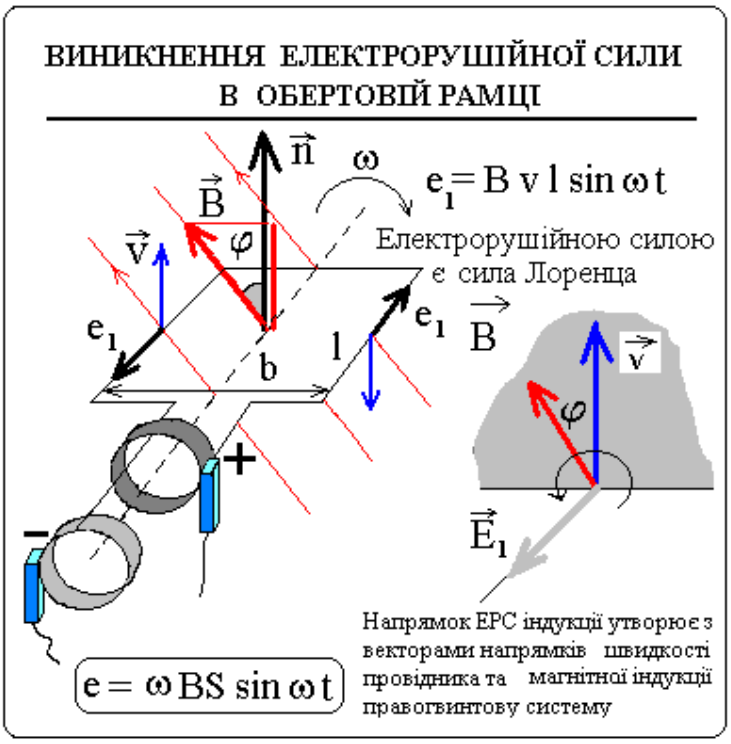
При довільній зміні потоку:

$$e_i = -\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\Phi^{|}(t) = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

При нерівномірній зміні потоку останнє співвідношення дає значення ЕРС в даний момент часу (на дану мить) – *миттєве значення*, а попередня формула дає лише *середнє значення* за час Δt.

З аналізу формули потоку ВМІ, $\Phi = BS\cos\varphi$, випливає, що найпростіший з технічного боку метод отримання змінного потоку полягає у зміні кута φ, тобто обертанні контура в магнітному полі.

Розглянемо виникнення ЕРС в плоскому витку, який обертається в магнітному полі. В найпростішому випадку виток являє собою плоску прямокутну рамку, що обертається навколо осі, яка проходить по осі симетрії рамки. В такій рамці електрорушійні сили виникають лише в бічних провідниках і мають протилежний напрям в зв'язку з протилежністю напрямків швидкості цих провідників. Саме тому ці ЕРС напрямлені проти



годинникової стрілки, якщо дивитись з кінця вектора нормалі до площини рамки і в сумі утворюють загальну ЕРС рамки. Електрорушійна сила в торцевих провідниках рівна нулю, так як дві половини цих провідників мають протилежну швидкість і в них виникають протилежні ЕРС, які взаємно компенсуються. До такого висновку можна також прийти врахувавши те, що через площу поверхні, яку описують торцеві провідники, не змінюється потік ВМІ.

Електрорушійна сила в бічному провіднику довжиною l, який рухається зі швидкістю $v = \frac{\omega \cdot b}{2}$, де $\omega = \frac{\varphi}{t}$ − кутова швидкість (циклічна частота) обертання рамки, а $\frac{b}{2}$ (половина довжини торцевого провідника) слугує радіусом обертового руху, буде рівною

$$e = v\,B\,l\,\sin\varphi .$$

Електрорушійна сила в рамці складається з ЕРС двох бічних провідників.

$$e = 2vBl\sin\varphi == B\,2\omega\frac{b}{2}l\sin\varphi = \omega \cdot BS\,\sin\omega\,t\ .$$

Оскільки BS= Φ_m − є максимальним (амплітудним) значенням потоку ВМІ, то ЕРС індукції запишеться і так

$$e_i = \omega \cdot \Phi_m \sin\omega \cdot t\ ,$$

або

$$e_i = \varepsilon_m \sin\omega \cdot t\ .$$

Таким чином маємо гармонійно змінну ЕРС, яка виявляє себе у вигляді *напруги на контактних щітках, що відводять цю ЕРС від колекторних* кілець.

Зауваження. До такого ж результату приводять і прямі обчислення, з врахуванням того, що *за законом електромагнітної індукції Фарадея ЕРС індукції рівна похідній потоку по часу зі знаком мінус*

$$e = -\Phi^{|}(t) = -(\,B\,S\cos\omega \cdot t\ )^{|} = \omega \cdot BS\sin\omega \cdot t = \varepsilon_m \sin\omega \cdot t\ .$$

Останні обчислення носять більш загальний характер, так як є справедливими для обертового витка будь-якої форми.

Якщо в магнітному полі обертається обмотка з N витків, то електрорушійні сили всіх витків сумуються і в результаті отримуємо ЕРС в N разів більшу.

Якщо ж магнітне поле створюють N_p пар магнітних полюсів, то частота зміни потоку ВМІ та ЕРС зросте в p разів.

$$e = N_p\,N\,\omega\,BS\,\sin\omega t.$$

Пристрій, в якому створюється змінна ЕРС називається генератором змінного струму.

Гармонійно змінна електрорушійна сила (або напруга) викликає в електричному колі *гармонійно змінний струм, який являє собою вимушені електромагнітні коливання* в електропровідній мережі. Проте зв'язок змінної напруги і відповідного струму є не таким простим, як для випадку їх постійних значень. Перша відмінність полягає у можливості неодночасних (несинхронних) змін напруги і струму, які свого максимального значення можуть набувати в різні моменти часу, тобто здійснювати коливання, які матимуть зсув за фазою (несинфазні коливання). Причиною такого зсуву є індуктивність та ємність провідників.

2. Електромагнітні коливання

Електромагнітними коливаннями є коливання пов'язані з коливаннями електромагнітного поля.

До таких коливань належать, наприклад, коливання струму, напруги, електрорушійної сили, які спостерігаються в мережах змінного струму.

Якщо заряд на обкладинках конденсатора здійснює гармонійні коливання

$$q = q_m \sin\omega t,$$

то струм на дільниці з конденсатором визначається за формулою швидкості гармонійних коливань

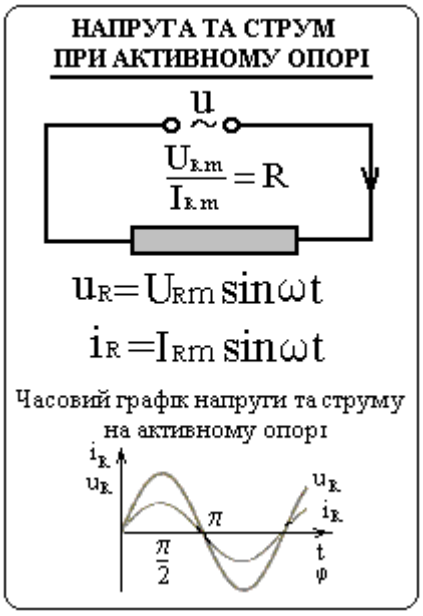
$$i = \omega q_m \cos\omega \cdot t = \omega q_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

або як похідна заряду по часу

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q^{|}(t) = \frac{dq}{dt}.$$

Такий струм змінюється за величиною та напрямком і називається *змінним струмом*. Видно, що струм, як і заряд, здійснює гармонійні коливання.

Швидкість зміни струму буде прискоренням коливань заряду.



2.1. Активний опір в колі змінного струму

Активний опір – це опір провідника, індуктивністю і ємністю якого можна знехтувати. Якщо напруга на активному опорі змінюється за законом $u = U_m \sin\omega \cdot t$, то в даному випадку не виникає причин, за яких струм має змінюватись за іншим законом. Таким чином, струм та напруга на активному опорі

здійснюють одночасні (синхронні) та однофазні (синфазні) коливання, тобто зсув фаз між струмом та напругою на активному опорі відсутній.

$$i = I_m \sin\omega \cdot t.$$

Величина активного опору визначається співвідношенням

$$R = \frac{U_m}{I_m}.$$

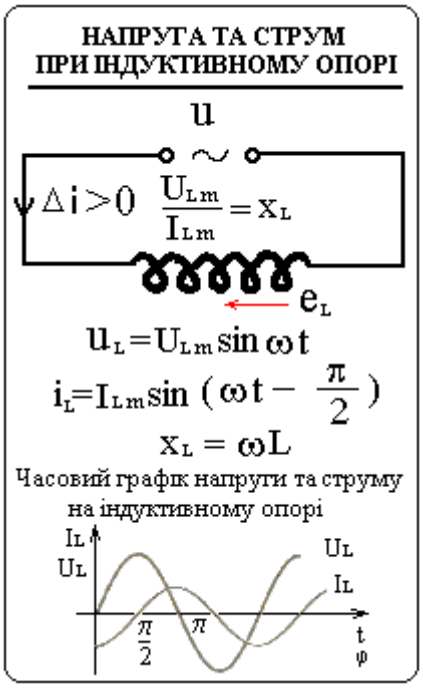
2.2.Індуктивний опір в колі змінного струму

Індуктивний опір – це опір провідника зумовлений його індуктивністю. Такий опір має котушка індуктивності, яка є носієм і символом індуктивного опору.

Причиною виникнення індуктивного опору є електрорушійна сила самоіндукції e_L, яка виникає в результаті зміни струму в провіднику, і, за правилом Лєнца, перешкоджаючи зміні цього струму, чинить йому тим самим додатковий опір.

$$e_L = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} \quad \text{(для рівномірної зміни струму)},$$

$$e_L = -L\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta i}{\Delta t} = -Li^{|}(t) = -L\frac{di}{dt} \quad \text{(для довільної зміни струму)}.$$



Останні рівняння вказують на те, що ЕРС самоіндукції прямопропорційна індуктивності провідника і швидкості зміни струму, а, отже, його частоті.

Звідси можна зробити висновок, що індуктивний опір прямопропорційний частоті струму та індуктивності провідника, і що максимального значення струм набуде пізніше ніж напруга, тобто струм відставатиме від напруги за фазою.

$$X_L \propto \omega \cdot L$$

Знайдемо зв'язок струму і напруги на індуктивному опорі. Нехай струм змінюється, здійснюючи гармонійні коливання за законом $i_L = I_{Lm}\sin\omega \cdot t$. Швидкість цих коливань (швидкість зміни струму) може бути знайденою за формулою швидкості гармонійних коливань

$$\frac{\Delta i(t)}{\Delta t} = \omega \cdot I_{Lm}\sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) = \omega \cdot I_{Lm}\cos\omega \cdot t.$$

Напруга на індуктивному опорі рівна і протилежна за знаком е.р.с. самоіндукції

$$u_L = -e_L = \omega \cdot LI_{Lm}\cos\omega \cdot t = \omega \cdot L\, I_{Lm}\sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) = U_{Lm}\sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}),$$

де

$$U_{Lm} = \omega \cdot LI_{Lm}.$$

Останнє доводить, що струм в індуктивному опорі відстає від напруги за фазою на $\frac{\pi}{2}$.

Індуктивний опір X_L визначається як відношення амплітуди напруги до амплітуди струму

$$X_L = \frac{U_{Lm}}{I_{Lm}}$$

$$X_L = \omega \cdot L$$

Зауваження. Співвідношення між струмом і напругою можна одержати розглянувши гармонійно змінний струм і, знайшовши швидкість його зміни, як похідну по часу, підставити цю похідну в формулі е.р. с. самоіндукції. Нехай

$$i_L = I_{Lm}\sin\omega \cdot t,$$

тоді

$$u_L = -e_L = Li^{|}(t) = L(I_{Lm}\sin\omega \cdot t)^{|} = \omega \cdot LI_{lm}\cos\omega \cdot t$$

у відповідності до раніше одержаного.

Також можна прийти до попереднього результату виходячи з рівняння зміни напруги і проінтегрувавши вираз з похідною струму.

$$u_L = U_{Lm}\sin\omega \cdot t$$

$$u_L = -e_L = Li^{|}(t)$$

звідси

$$i^{|}(t) = \frac{u_L}{L} = \frac{U_{Lm}}{L}\sin\omega \cdot t,$$

проінтегрувавши, отримаємо:

$$i_L = \frac{U_{Lm}}{L}\int \sin\omega \cdot t = -\frac{U_{Lm}}{\omega \cdot L}\cos\omega \cdot t = \frac{U_{Lm}}{\omega \cdot L}\sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}) = I_{Lm}\sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2})$$

Останній результат є еквівалентним попередньому.

2.3. Ємнісний опір в колі змінного струму

Ємнісний опір це опір провідника зумовлений його ємністю. Такий опір має конденсатор, який є носієм і символом ємнісного опору. Конденсатор розриває коло постійного струму, але змінний струм проходить через конденсатор, завдяки перезарядці його обкладинок. При зарядці конденсатора на ньому виникає напруга, яка протидіє зміні зовнішньої напруги, чим і пояснюється ємнісний опір.

Зрозуміло, що такий опір зростає при зростанні напруги на конденсаторі, яка згідно формулі $u_c = \frac{q}{c}$ залежить від набутого заряду та ємності. Набутий заряд прямопропорційний часові зарядки (періоду коливань), тобто, обернено пропорційний частоті. Звідси випливає висновок, що ємнісний опір має бути обернено пропорційний частоті коливань та ємності провідника.

$$x_c \propto \frac{1}{\omega c}$$

Розрахунки показують, що дійсно

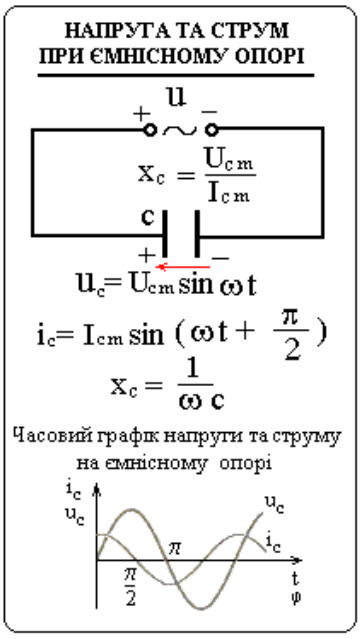
$$x_c = \frac{1}{\omega c}$$

Напруга на конденсаторі досягає максимального значення після того, як струм, зменшуючись від максимуму до нуля, надає конденсатору максимального заряду. Це означає, що струм випереджає напругу за фазою на π/2. Оскільки струм і напруга на ємнісному опорі змінюються не синхронно і не синфазно, то ємнісний опір визначається через відношення не миттєвих значень напруги і струму, а амплітудних.

Проведемо розрахунки зв'язку напруги струму та опору у зазначеному вище випадку. Струм, як швидкість зміни заряду, буде:

$$i_C = \omega \cdot q_{cm} \cos\omega \cdot t = \omega \cdot cU_{cm} \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) = I_{cm} \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}).$$

$$u_c = \frac{q_c}{c} = \frac{q_{cm}}{c} \sin\omega \cdot t = \frac{q_{cm}}{c} \sin\omega \cdot t = U_{cm} \sin\omega \cdot t.$$



Звідси випливає, що струм ємнісного опору випереджує напругу за фазою на $\frac{\pi}{2}$.

Величина ємнісного опору

$$X_C = \frac{U_{cm}}{I_{cm}} = \frac{U_{cm}}{\omega c U_{cm}},$$

$$X_C = \frac{1}{\omega c},$$

Зауваження. Такий же результат дають обчислення із застосуванням операцій математичного аналізу. Так, з рівняння напруги, можемо отримати рівняння заряду конденсатора, і знайти струм за похідною заряду.

$$u_C = U_{cm} \sin\omega \cdot t = \frac{q_{cm}}{c} \sin\omega \cdot t.$$

$$q_c = cu_c = cU_{cm} \sin\omega \cdot t,$$

$$i_c = q_c^{|}(t) = (cU_{cm} \sin\omega \cdot t)^{|} = \omega \cdot cU_{cm} \cos\omega \cdot t = \omega \cdot cU_{cm} \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) = I_{cm} \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}).$$

І, навпаки, виходячи з рівняння струму, можна отримати рівняння напруги

$$i_c = I_{cm} \sin\omega \cdot t;$$

$$u_c = \frac{q_c}{c}.$$

$$q_c = \int dq = \int i dt = \int I_{cm} \sin\omega \cdot t \, dt = -\frac{I_{cm}}{\omega} \cos\omega \cdot t = \frac{I_{cm}}{\omega} \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}),$$

$$u_c = \frac{I_{cm}}{\omega \cdot c} \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}) = U_{cm} \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}).$$

2.4. Вільні електромагнітні коливання

Розглянемо коло з котушкою та конденсатором (індуктивністю та ємністю), яке називається *коливальним контуром*.

Якщо зарядити конденсатор і замкнути його на котушку, то замість простої розрядки конденсатора спостерігатиметься його багаторазова перезарядка, тобто в контурі виникнуть електромагнітні коливання. Причиною перезарядки і виникнення коливань є електрорушійна сила самоіндукції, яка на етапі зменшення розрядного струму дає струм, який перешкоджає цьому зменшенню і перезаряджає конденсатор.

Процеси, що відбуваються в контурі з гармонійними коливаннями ілюструє мал. 20. Початковий етап (на графіку від о до Т/4) полягає в розрядці конденсатора, зменшенні його заряду від початкового (максимального) значення до 0. Цей процес означає виникнення розрядного струму, рівного швидкості зміни заряду, який зростає від мінімального (нульового) до максимального значення.

Хід графіка струму стане зрозумілим, якщо пригадати, що швидкість зміни величини відповідає тангенсу кута нахилу дотичної до графіка цієї величини. Це підтверджується і відповідними формулами.

Якщо заряд змінюється за законом косинуса (саме ця функція має максимум в нульовий момент часу)

$$q = q_m \cos\omega \cdot t,$$

то швидкість зміни заряду (струм) буде

$$i = -\omega \cdot I_m \sin\omega \cdot t = \omega \cdot I_m \cos(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}).$$

В результаті зміни струму в котушці виникає е.р.с. самоіндукції, струм якої перешкоджатиме зміні основного і на етапі зростання останнього буде йому протилежним за напрямком. Саме з цієї причини розрядний струм буде досягати екстремального значення поступово. Е.Р.С. самоіндукції визначається швидкістю зміни струму, або прискоренням зміни заряду, тому при зміні розрядного струму від нуля до екстремального значення е.р.с.(і струм самоіндукції) буде змінюватись від екстремального значення до нуля.

В момент нульового значення заряду конденсатора розрядний струм не впаде миттєво до нуля, а буде змінюватись поступово. Так як в цей момент е.р.с. і струм самоіндукції змінять напрям на протилежний і, перешкоджаючи зміні розрядного струму будуть його підсилювати. Відбудеться перезарядка конденсатора і процес повториться в зворотному напрямку. Таким чином в контурі виникнуть електромагнітні коливання, пов’язані з коливаннями заряду конденсатора напруги на ньому та струму в колі.

2.5. *Перетворення енергії в коливальному контурі. Аналогія електромагнітних і механічних коливань*

При коливаннях в контурі енергія електричного поля конденсатора $W_C = \frac{q^2}{2c} = \frac{cu^2}{2}$ перетворюється в енергію магнітного поля котушки з струмом $W_L = \frac{Li^2}{2}$ і – навпаки. Якщо нехтувати активним опором контуру, то повна енергія коливань буде зберігатись сталою $W = W_L + W_C = \text{const}$.

$$\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2c} = \text{const} \ (14.1).$$

Максимальні значення енергій котушки і конденсатора будуть рівними між собою та рівні повній енергії контуру.

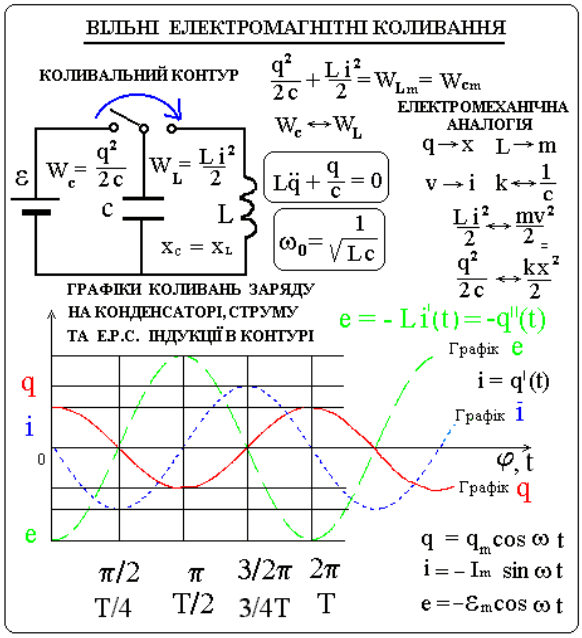
$$W_{Lm} = W_{cm} = W .$$

Характер зміни електромагнітних величин та форма співвідношень між ними дозволяють встановити аналогію цих величин механічним і електромагнітні коливання поставити у відповідність механічним.

2.6. Власна частота коливань в контурі

Запишемо рівняння вільних коливань в контурі, нехтуючи його активним опором. За другим правило Кірхгофа алгебраїчна сума е.р.с. в контурі рівна сумі падінь напруги на всіх дільницях контура

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} u_i .$$



Єдиною е.р.с в в контурі є е.р.с. самоіндукції $e_{Li} = -Li'(t) = -Lq''(t)$,

а напругою – напруга на конденсаторі

$u = \frac{q}{c}$,

тому

$$-Lq^{\|}(t) = \frac{q}{c}, \text{ або}$$

$$q^{\|}(t) = -\frac{q(t)}{Lc}.$$

Останнє рівняння є рівнянням гармонійного коливання. Воно означає, що прискорення зміни величини (заряду) прямопропорційне самій величині, тобто величина (заряд) здійснює гармонійні коливання з циклічною частотою

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}}, \text{ та періодом}$$

$$T = 2\pi\sqrt{Lc}.$$

Цю формулу у 1853 року отримав В. Томсон (Кельвін)

Зауваження1. Формулу частоти вільних коливань в контурі можна отримати з врахуванням того, що амплітуда напруги та струму на котушці та конденсаторі повинні бути рівними. А це означає рівність опорів котушки та конденсатора (індуктивного та ємнісного опорів).

$$X_L = X_C,$$

або

$$\omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot c},$$

звідки

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$$

2.7. Вимушені електромагнітні коливання. Закон Ома для змінного струму. Повний опір змінному струмові. Зсув фаз між струмом і напругою

Розглянемо дільницю з активним опором, індуктивністю та ємністю (RLC), яка ввімкнена до джерела гармонійно змінної напруги.

$$u = U_m \sin \omega \cdot t,$$

Ця напруга викликає на дільниці вимушені коливання струму такої ж частоти, фаза яких може відрізнятись від фази коливань напруги.

$$I = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

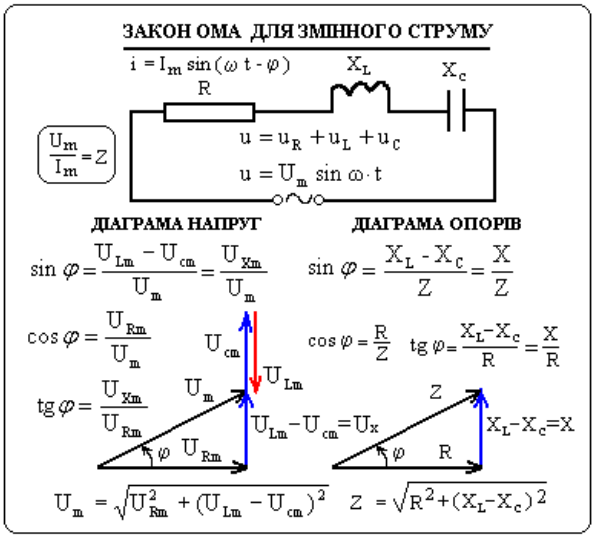
Зовнішня напруга дорівнює сумі напруг на активному індуктивному та ємнісному опорах.

$$u = u_R + u_L + u_C$$

Фаза коливань активної напруги така, як і струму, індуктивної – випереджує, а ємнісної відстає на 0,5π (90^0).

Те, що індуктивна та ємнісна напруги коливаються в протилежних фазах, наводить на думку про можливість їхньої компенсації при певній частоті струму, і зосередженні напруги, прикладеної до дільниці, на активному опорі.

Знайдемо зв'язок між струмом та напругою на дільниці – форму закону Ома для змінного струму. Завдання полягає у визначенні амплітуди струму, величини опору та зсуву фаз між струмом та напругою.



Побудуємо векторну діаграму напруг, починаючи з правої частини, взявши до уваги, що два останні доданки зобразяться протилежними векторами, напрямленими під прямим кутом до вектора, який зображує перший доданок. Сума векторів активної напруги та результуючого вектора індуктивної та ємнісної напруг дасть вектор загальної зовнішньої напруги.

За теоремою Піфагора

$$U_m = \sqrt{U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{cm})^2}\ .$$

Почленно розділивши на I_m, матимемо

$$\frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_c)^2}\ .$$

Отримано одну з форм закону Ома для змінного струму, за яким відношення амплітудного значення напруги до амплітудного значення струму для даної дільниці є величиною сталою – загальним опором (імпедансом).

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_c)^2}\ .$$

Останнє співвідношення можна подати у вигляді діаграми опорів, яка подібна до діаграми напруг і в якій довжини зображуючих векторів в I_m менші.

На відміну від *активного опору* R, на якому виділяється енергія у вигляді теплових втрат, $X = X_L - X_C$ називається *реактивним опором*. На реактивному опорі не відбувається втрат енергії, так як енергія, яка за першу половину періоду поглинається цим опором, за другу половину періоду повертається в мережу.

Щоб пов'язати миттєві значення струму та напруги слід врахувати різницю фаз між ними. Оскільки фаза активної напруги і струму співпадають зсув фаз між струмом та напругою на векторній діаграмі зобразиться кутом між векторами повної та активної напруг.

З діаграми

$$\sin\varphi = \frac{U_{Lm} - U_{cm}}{U_m} = \frac{X_L - X_c}{Z} = \frac{X}{Z},$$

$$\cos\varphi = \frac{U_{Rm}}{U_m} = \frac{R}{Z},$$

$$tg\varphi = \frac{U_{Lm} - U_{cm}}{U_{Rm}} = \frac{X_L - X_c}{R} = \frac{X}{R}.$$

2.8. Потужність в колі змінного струму. Активна, реактивна та повна потужність змінного струму. Середня потужність. Діаграма потужностей.

Повна потужність s, що розвивається дільниці змінного струму є сумою активної потужності p та реактивної q (індуктивної q_L та ємнісної q_c)

$s = p + q_L + q_c,$

$s = u\,i = U_m I_m \sin\omega \cdot t \sin(\omega \cdot t \pm \varphi)$,

$p = iu_R = I_m U_{mR} \sin^2 \omega t = 0{,}5\, I_m U_{mR} (1 - \cos 2\omega t) = 0{,}5\, I_m U_{mR} - 0{,}5\, I_m U_{mR} \cos 2\omega t$

$q_L = iu_L = I_m U_{mL} \sin \omega t \sin(\omega t + \pi/2) = I_m U_{mL} \sin \omega t \cos \omega t = 0{,}5\, I_m U_{mL} \sin 2\omega t$

$q_c = iu_c = I_m U_{mc} \sin \omega t \sin(\omega t - \pi/2) = - I_m U_{mc} \sin \omega t \cos \omega t = - 0{,}5\, I_m U_{mc} \sin 2\omega t$

Миттєве значення кожної потужності змінного струму, змінюється з відповідною частотою. та періодом коливань. Для знаходження середнього значення потужності за достатньо великий, у порівнянні з періодом коливань, проміжок часу, достатньо знайти її середнє значення за період.

Формули потужностей показують, що лише на активному опорі потужність завжди є позитивною, тобто, тут виконується позитивна робота. Активна потужність має постійну складову та складову, що змінюється з подвійною частотою. Її середнє значення рівне $0{,}5 I_m U_m$, так як середнє значення $\cos 2\omega t$ за період рівне нулю.

Потужність на індуктивному та ємнісному опорі знакозмінна, що означає чергування півперіодів отримання і повернення енергії з нульовою роботою та нульовим балансом енергоспоживання, їх середнє значення рівне нулю.

Виразивши активну напругу через загальну, у відповідності до діаграми напруг, середню активну потужність можна подати

$$p = 0{,}5\, I_m U_m \cos \varphi$$

Щоб знайти середнє значення повної потужності, визначимо середнє значення добутку синусів.

$\sin\omega\cdot t\sin(\omega\cdot t\pm\varphi)=\sin\omega\cdot t\,(\sin\omega\cdot t\cos\varphi\pm\cos\omega\cdot t\sin\varphi)=\sin^2\omega\cdot t\cos\varphi\pm\sin\omega\cdot t\cos\omega\cdot t\sin\varphi$

$\sin^2\omega t = 0{,}5\,(1-\cos 2\omega t)$,

$\sin\omega t\cos\omega t = 0{,}5\sin 2\omega t$.

Тоді

$\sin\omega t\sin(\omega t\pm\varphi) = 0{,}5\cos\varphi - 0{,}5\cos\varphi\cos 2\omega t \pm 0{,}5\sin\varphi\sin 2\omega t$

Врешті

$$s = 0{,}5\,(I_m U_m - I_m U_m\cos 2\omega t)\cos\varphi \pm 0{,}5\, I_m U_m\sin\varphi\sin 2\omega t$$

Перший доданок є активною потужністю, другий – реактивною.

Зв’язок потужностей можна подати векторною діаграмою.

Оскільки середні значення $\cos 2\omega t$ та $\sin 2\omega t$ за період рівні нулю, то середнє значення повної потужності становитиме

$$\bar{s} = 0{,}5\, I_m U_m\cos\varphi$$

З останніх міркувань випливає, що *середня потужність, яка виділяється змінним струмом, є активною потужністю*, чого і слід було чекати.

Косинус різниці (зсуву фаз) між струмом та напругою ($\cos\varphi$) називається *коефіцієнтом потужності*.

Легко помітити, що зв’язок потужностей для дільниці змінного струму можна подати у вигляді діаграми потужностей, подібної до діаграм напруг та опорів.

2.9. Діючі (ефективні) значення струму та напруги

Діючими (ефективними) називаються значення змінного струму, або напруги рівні значенням постійного струму, або напруги, які виділяють рівну потужність.

За означенням

$$I^2_{еф}R = \frac{I_m^2}{2}R,$$

тому

$$I_{еф} = I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Очевидно, що

$$U_{еф} = U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Діючі (ефективні) значення струму та напруги змінного струму в $\sqrt{2}$ *менші амплітудних.*

З того, що

$$i^2 = I_m^2\sin^2\omega t = 0{,}5\, I_m^2\,(1-\cos 2\omega t)$$

а середнє значення cos 2ωt за період рівне 0 (множини додатних та від'ємних значень повністю відповідні), то середній квадрат струму рівний половині амплітуди.

Отже *діюче (ефективне) значення змінного струму. або напруги можна означити як корінь квадратний з середніх квадратів миттєвих значень (середнє квадратичне) цих величин.*

$$I = \sqrt{\overline{i^2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

та

$$U = \sqrt{\overline{u^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Зауваження

Аналогія електричних і механічних коливань стає очевидною, якщо вимушені коливання в електричному колі розглянути з точки коливань заряду.

Якщо струм в колі збуджується гармонійною ЕРС

$$e = \varepsilon_m \sin \omega \cdot t,$$

то за правилом Кірхгофа

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} u_i .$$

Коливання ЕРС викличуть коливання заряду на ємності дільниці, які за фазою можуть відставати від коливань ЕРС на величину φ.

$$q = q_m \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

Коливання струму, як швидкість коливань заряду, будуть випереджувати останні за фазою на $\frac{\pi}{2}$.

$$i = \omega \cdot q_m \sin(\omega \cdot t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Швидкість зміни струму, являтиме собою прискорення коливань заряду і буде випереджувати їх на π.

$$i^{|}(t) = \omega^2 q_m \sin(\omega \cdot t - \varphi + \pi) = -\omega^2 q_m \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

Тому ЕРС індукції

$$e_L = -Li^{|}(t) = \omega^2 L q_m \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

Підставивши значення в (16.1). матимемо

$$e_L + e = u_R + u_C,$$

або

$$\omega^2 L q_m \sin(\omega \cdot t - \varphi) + \varepsilon_m \sin \omega t = U_m \sin \omega \cdot t + R\omega \cdot q_m \sin(\omega \cdot t - \varphi + \frac{\pi}{2}) + \frac{q_m}{c} \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

Звідси

$$\varepsilon_m \sin \omega \cdot t = \omega \cdot q_m R \sin(\omega \cdot t - \varphi + \frac{\pi}{2}) + L q_m (\frac{1}{Lc} - \omega^2) \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

Оскільки

$$\frac{1}{Lc} = \omega_0^2,$$

то

$$\varepsilon_m \sin\omega\cdot t = \omega\cdot q_m R\sin(\omega\cdot t-\varphi+\frac{\pi}{2}) + L q_m(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\omega\cdot t-\varphi)$$

Побудуємо векторну діаграму останнього рівняння, врахувавши, що вектор, який зображує ліву частину останнього рівняння буде рівний сумі векторів, що зображують два доданки правої частини. Перший доданок має фазу на $\frac{\pi}{2}$ більшу ніж другий, тому його вектор повернутий на $\frac{\pi}{2}$, відносно вектора другого доданку.

За теоремою Піфагора

$$\varepsilon_m^2 = \omega^2 q_m^2 R^2 + L^2 q_m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2,$$

звідки

$$q_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2\omega^2 + L^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$$

Для амплітуди струму $I_m = \omega\cdot q_m$ матимемо

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$$

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{\omega}\omega_0^2 - \frac{L}{\omega}\omega^2)^2}}$$

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}}$$

2.10. Електричний резонанс, Резонанс напруг і струмів

Сполучення опорів є послідовним. При такому сполученні може спостерігатись явище резонансу напруг.

З отриманого випливає, що існує *резонансна частота* $\omega = \omega_0$, *при якій підкореневий вираз в дужках дорівнюватиме 0, тобто амплітуда коливань заряду і струму набуває найбільшого (екстремального) значення.*

$$q_{mex} = \frac{U_m}{\omega\cdot R},$$

$$I_m = \frac{U_m}{R}$$

Величина резонансної частоти знаходиться з умови

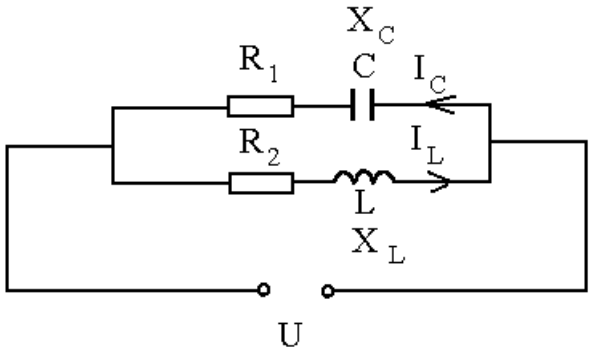
$$(\omega_0^2 L - \frac{1}{c}) = 0$$

Звідки

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}} \ .$$

Видно, що резонансна частота збігається з частотою вільних коливань (власною частотою) контуру.

Резонанс напруг полягає у вирівнюванні та компенсації реактивних напруг при їх максимальному значенні, внаслідок вирівнювання та компенсації відповідних опорів при співпадінні частоти зовнішньої напруги з власною частотою контуру.

При резонансі напруг відбувається: зменшення загального опору сполучення до величини активного; зростання напруги на активному опорі до загальної; зростання амплітуди струму до максимального значення при співпадінні фаз струму та напруги; коефіцієнт потужності набуває максимального значення (повна потужність є активною)

Резонанс струмів відбувається при паралельному сполученні реактивних опорів (X_L та X_C) і *полягає у вирівнюванні та компенсації реактивних струмів в паралельних дільницях внаслідок вирівнювання відповідних опорів при співпадінні частоти зовнішньої напруги з власною частотою контуру.*